# Järeltöö lahendused

Diskreetsed struktuurid

**Ülesanne 1.** Mitu erinevat 8-tähelist sõna saab moodustada 6 liiki tähtedest, kui iga sõnas kasutatav täht peab seal esinema vähemalt kahes eksemplaris?

*Lahendus.* Kui sõnas kasutatakse 3 erinevat liiki tähti, igaühte 2 eksemplari, siis sõnasse kuuluvate tähtede liikide väljavalimiseks 6 liigi hulgast on $\binom{6}{3}$ võimalust ning seejärel väljavalitud tähtede ümberpaigutamiseks (kordumistega kombinatsioonide (anagrammide) valemi põhjal) $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}$ võimalust, kokku on erinevaid sõnu

$$\binom{6}{3} \cdot \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 1800.$$

Kui sõnas kasutatakse 2 erinevat liiki tähti, kumbagi 3 eksemplari, siis sarnaselt eelnevaga saame erinevate sõnade arvuks

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = 300.$$

Kui sõnas kasutatakse 2 erinevat liiki tähti, ühte 4 ja teist 2 eksemplari, siis sõnas 4 korda esineva tähe liigi väljavalmiseks on 6 võimalust ja pärast seda 2 korda esineva tähe liigi valimiseks 5 võimalust. Kui tähtede liigid on valitud, siis saab vastavat arvu tähti omavahel ümber paigutada $\frac{6!}{4!\,2!}$ viisil, kokku on sõnu seega

$$6 \cdot 5 \cdot \frac{6!}{4!\,2!} = 450.$$

Kui sõnas kasutatakse ainult 1 liiki tähti, siis selle liigi väljavalimiseks on 6 võimalust.

Et eeltoodud variandid välistavad üksteist ja ammendavad kõik võimalused, siis liitmisreegli põhjal saame erinevate sõnade arvuks $1800 + 300 + 450 + 6 = 2556$.

**Ülesanne 2.** Finantsvara väärtus $n$-ndal aastal on 4 korda suurem kui vara juurdekasv ajavahemikus üle-eelmisest aastast eelmiseni. Leida avaldis, millest on võimalik ainult naturaalarvu $n$ järgi välja arvutada finantsvara väärtus $n$-dal aastal, kui esimesel aastal on vara väärtus 1 ühik ja teisel aastal 3 ühikut.

*Lahendus.* Olgu $A_n$ finantsvara väärtus $n$-ndal aastal. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $A_n = 4(A_{n-1} - A_{n-2})$, millest

$$A_n = 4A_{n-1} - 4A_{n-2}.$$

Algtingimused on $A_1 = 1$, $A_2 = 3$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - 4q + 4 = 0$ lahendid on $q_1 = 2$, $q_2 = 2$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 &= 1 \\ 4c_1 + 8c_2 &= 3, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$. Finantsvara väärtus $n$-ndal aastal on seega

$$A_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} n \cdot 2^n = (1+n)2^{n-2}.$$

**Ülesanne 3.** Teha kindlaks, kas järgmise naabrusmaatriksiga antud graafis leidub Euleri tsükkel.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Lahendus.* Kasutame teoreemi, mille põhjal graafis leidub Euleri tsükkel siis, kui graaf on sidus ja tema kõigi tippude astmed on paaris. Naabrusmaatriksist näeme et, graaf on sidus, sest tipust 1 pääseb tippudesse 2, 3, 4 ja 7, tipust 3 aga pääseb edasi tippudesse 5 ja 6. Samuti on iga tipu aste paaris, sest naabrusmaatriksi iga rea elementide summa on 4 (st igast tipust lähtub 4 serva). Järelikult leidub selles graafis Euleri tsükkel.

**Ülesanne 4.** Kas on võimalik värvida 7-tipulise täisgraafi mõned servad punaseks ja ülejäänud mustaks nii, et igast tipust väljub punaseid servi sama palju kui musti?

*Lahendus.* 7-tipulise täisgraafi igast tipust lähtub 6 serva. Oletame, et täisgraafi servad saab nii värvida, et iga tipu juures asub 3 punast ja 3 musta serva. Kui graafist nüüd kõik mustad servad kustutada, jääb järele 7-tipuline graaf, mille igast tipust väljub 3 serva. See olukord aga on vastuolus teoreemiga, mille põhjal igas graafis on paaritu astmega tippe paarisarv (või, mis on sama, iga graafi tipuastmete summa on paaris). Järelikult ei saa antud täisgraafi servi nii värvida.

**Ülesanne 5.** Teha kindlaks, kas järgmine positiivsete täisarvude hulgal määratud relatsioon

$$\mathcal{R} = \{(m,n) : m \leqslant n^2\}$$

on mitterange järjestus.

*Lahendus.* Relatsioon ei ole mitterange järjestus, sest ta ei rahulda antisümmeetrilisuse omadust: näiteks $(2,3) \in \mathcal{R}$ ja $(3,2) \in \mathcal{R}$ (st $2 \leqslant 3^2$ ja $3 \leqslant 2^2$), aga $3 \neq 2$.

# Järeltöö lahendused

## Diskreetsed struktuurid

**Ülesanne 1.** Mitmel viisil saab 6 sakslasest, 6 prantslasest ja 6 itaallasest valida 9-liikmelise rühma, kuhu igast rahvusest kuulub vähemalt kaks esindajat?

*Lahendus.* On kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust, kuidas eri rahvuste esindajate arvud saavad rühmas jaguneda: a) 2, 2, 5; b) 2, 3, 4; c) 3, 3, 3.

Juhul a) on 3 võimalust valida see rahvus, kust võetakse 5 esindajat, ülejäänud rahvustest võetakse siis kummastki 2 esindajat. Et igasse rahvusesse kuulub 6 inimest, siis 5 inimese väljavalimiseks on $\binom{6}{5}$ võimalust (5-liikmelise esindusega rahvuse puhul) ning 2 inimese valimiseks $\binom{6}{2}$ võimalust (teise ja kolmanda ülejäänud rahvuse puhul). Ühelgi sammul ei sõltu tehtavate valikute arv sellest, millised valikud tehti eelmistel sammudel, seega võime moodustatavate rühmade koguarvu leidmiseks rakendada korrutamisreeglit. Kokku on võimalusi sel juhul

$$3 \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 4050.$$

Juhul b) on 3 võimalust valida rahvus, kust võetakse 2 esindajat, ning seejärel 2 võimalust valida rahvus, kust võetakse 3 esindajat, ülejäävast rahvusest võetakse siis 4 esindajat. Inimeste väljavalimiseks on esimese rahvuse puhul $\binom{6}{2}$ võimalust, teise rahvuse puhul $\binom{6}{3}$ võimalust ning kolmanda puhul $\binom{6}{4}$ võimalust. Rühma moodustamiseks on võimalusi seega

$$3 \cdot 2 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{6}{4} = 27000.$$

Juhul c) tuleb kolmest rahvusest igaühest valida 3 esindajat, selleks on iga rahvuse puhul $\binom{6}{3}$ võimalust ning rühma moodustamise võimalusi on

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{6}{3} = 8000.$$

Vaadeldud kolm juhtu on üksteist välistavad ja ammendavad. Liitmisreegli põhjal on rühmade koguarv $4050 + 27000 + 8000 = 39050$.

**Ülesanne 2.** Laboris kasvatatakse bakterikultuuri. Iga bakter, kes on päeva alguseks vähemalt ühe päeva vana, produtseerib päeva jooksul ühe uue bakteri, Päeva lõpus aga lisab laborant kultuurile juurde poole sellest bakterite hulgast, kes oli kultuuris olemas päeva alguses. Esimese päeva alguses moodustas laborant bakterikultuuri 200 uue bakteriga. Leida, mitmest bakterist koosneb see kultuur $n$-nda päeva alguseks.

*Lahendus.* Olgu $A_n$ bakterite arv $n$-nda päeva alguses. Ülesande tingimuste põhjal kehtib seos $A_{n+1} = A_n + A_{n-1} + \frac{1}{2}A_n$, millest

$$A_{n+1} = \frac{3}{2}A_n + A_{n-1}.$$

Algtingimused on $A_0 = 0$, $A_1 = 200$.

Karakteristliku võrrandi $q^2 - \frac{3}{2}q - 1 = 0$ lahendid on $q_1 = 2$, $q_2 = -\frac{1}{2}$. Järelikult rekurrentse võrrandi üldlahend on

$$A_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Algtingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 2c_1 - \frac{1}{2}c_2 &= 200, \end{aligned}$$

mille lahendid on $c_1 = -80$, $c_2 = 80$. Bakterite arv $n$-nda päeva alguseks on seega

$$A_n = (-80) \cdot 2^n + 80 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Ülesanne 3.** Mitu serva võib maksimaalselt eemaldada graafist naabrusmaatriksiga

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et saadav graaf jääks kindlasti sidusaks, kui eemaldatavaid servi

a) võib valida sobivalt;

b) valitakse juhuslikult?

*Lahendus.* Graaf on sidus, sest tipust 1 pääseb tippudesse 2, 5, 6, tipust 2 aga pääseb edasi tippudesse 3 ja 4.

a) Graafil on 6 tippu. Naabrusmaatriksis on 18 ühte, järelikult graafi tipuastmete summa on 18 ja graafil on $18 : 2 = 9$ serva. Seega selle graafi tsüklomaatiline arv (maksimaalne servade arv, mida võib eemaldada, et graaf jääks sidusaks) on $9 - 6 + 1 = 4$.

b) Eemaldatavate servade arv peab olema väiksem kui minimaalne tipuaste, sest vastasel korral võib juhtuda, et mingi tipu juurest eemaldatakse servad nii, et see tipp jääb isoleerituks. Antud graafi minimaalne tipuaste (minimaalne ühtede arv reas) on 3, järelikult võib eemaldada ülimalt 2 serva.

**Ülesanne 4.** Kas leidub turniir, mille tippude väljundastmed on 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7?

*Lahendus.* Kõigi tippude väljundastmete summas läheb iga kaar arvesse üks kord. Antud graafi väljundastmete summa on $1+2+2+3+4+5+5+6+7 = 35$, seega peaks sellel graafil olema 35 kaart. Teiselt poolt, graafil on 9 tippu ning 9-tipulisel täisgraafil on $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ serva, seega on iga 9-tipulise turniiri väljundastmete summa 36. Järelikult ülesandes antud väljundastmetega turniiri ei leidu.

**Ülesanne 5.** Teha kindlaks, millised omadustest refleksiivsus, antirefleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümeetrilisus, transitiivsus on olemas naturaalarvude hulgal määratud relatsioonil

$$\mathcal{R} = \{(m, n) : \text{SÜT}(m, n) = 1\}.$$

*Lahendus.*

- Relatsioon ei ole refleksiivne, sest $(2, 2) \notin \mathcal{R}$ (ehk $\text{SÜT}(2, 2) \neq 1$).
- Relatsioon ei ole antirefleksiivne, sest $(1, 1) \in \mathcal{R}$ (ehk $\text{SÜT}(1, 1) = 1$).
- Relatsioon on sümmeetriline, sest suurima ühisteguri omaduste järgi kehtib kõigi naturaalarvude $m$ ja $n$ korral $\text{SÜT}(m, n) = \text{SÜT}(n, m)$, järelikult kui $\text{SÜT}(m, n) = 1$, siis alati ka $\text{SÜT}(n, m) = 1$.

- Relatsioon ei ole antisümmeetriline, sest näiteks $\text{SÜT}(2,3) = 1$ ja $\text{SÜT}(3,2) = 1$, aga $2 \neq 3$.
- Relatsioon ei ole transitiivne, sest näiteks $\text{SÜT}(2,3) = 1$ ja $\text{SÜT}(3,4) = 1$, aga $\text{SÜT}(2,4) \neq 1$.